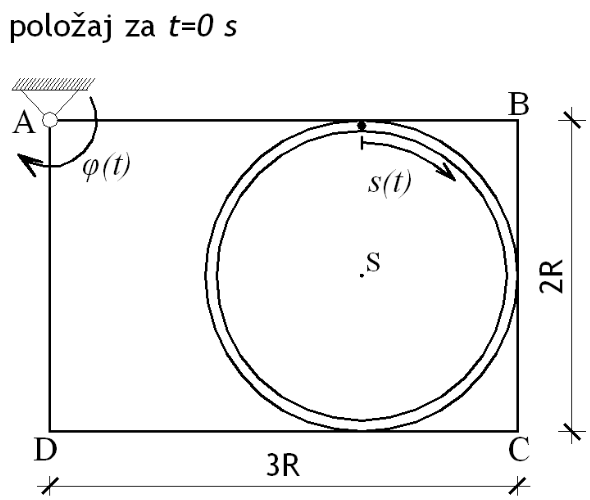
Ploča rotira oko normale na svoju ravninu po zakonu $\varphi(t) = 0{,}5\pi t^2$. U ploču je urezan žljeb po kojem se giba kuglica po zakonu $s(t) = \pi t^2$. Gibanje počinje iz prikazanog položaja. Treba odrediti veličinu i smjer brzine i ubrzanja kuglice za trenutak $t = 1\ s$ od početka gibanja. Prikazati položaj točke i sve vektore crtežom. R = 2 m.



ODREĐIVANJE POLOŽAJA ZA t_1=1 s:

PRIJENOSNO GIBANJE

- rotacija ploče oko točke A

$$\varphi_{PR}(t) = \frac{\pi t^2}{2} \xrightarrow{za\ t_1=1s} \varphi_{1PR} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

RELATIVNO GIBANJE

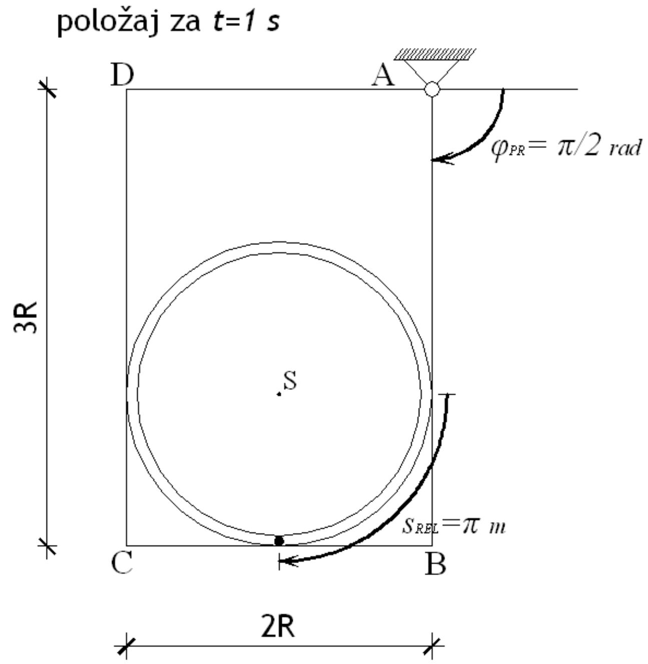
Relativno gibanje kuglice zadano je prirodnim načinom, odnosno po trajektoriji (kružnica), uz skalarnu funkciju gibanja *s(t)*.

$$s_{REL}(t) = \pi t^2 \xrightarrow{za\ t_1=1s} s_{1REL} = \pi \cdot 1^2 = \pi \text{ m}$$

Da bi se odredio položaj kuglice za prijeđeni put $s(t_1)=s_1$, izračunat će se opseg kružnice po kojoj se kuglica relativno giba:

$$o = 2R\pi = 2 \cdot 2 \cdot \pi = 4\pi \text{ m}$$

$$s_{1REL} = \frac{o}{4} = \pi \text{ m} \quad - kuglica\ je\ prešla\ četvrtinu\ opsega$$



Na slici je prikazan položaj za t = 1 s. Ploča se zarotirala za kut $\varphi_{PR} = \pi/2$ *rad* oko točke A, dok se kuglica u žljebu prešla je put od π *m* po obodu kružnice.

Nakon što se odredi položaj ploče i kuglice, mogu se odrediti vektori brzina i ubrzanja za prikazani položaj.

PRIJENOSNO GIBANJE

Ako zaustavimo gibanje kuglice u žljebu (relativno gibanje), kuglica će vršiti samo prijenosno gibanje. U zadatku, prijenosno gibanje je rotacija ploče oko točke A po zakonu $\varphi(t) = 0,5\pi t^2$. Budući da se radi o rotaciji vektori će se odrediti u polarnom koordinatnom sustavu.

$$\varphi_{PR}(t) = \frac{\pi t^2}{2} \xrightarrow{za\ t_1=1s} \varphi_{1PR} = \frac{\pi}{2}\ rad$$

$$\omega_{PR}(t) = \frac{d\varphi_{PR}}{dt} = \pi t \xrightarrow{za\ t_1=1s} \omega_{1PR} = \pi\ rad/s$$

$$\varepsilon_{PR}(t) = \frac{d\omega_{PR}}{dt} = \pi \xrightarrow{za\ t_1=1s} \varepsilon_{1PR} = \pi\ rad/s^2$$

Za određivanje vektora brzina potrebno je znati da je brzina okomita na radijvektor položaja točke. Za prijenosno gibanje rotacija se vrši oko točke A, tako da radijus rotacije za dani trenutak iznosi $\sqrt{10}R$, vektor brzine okomit je na radijus.

$$v_{1PR} = \omega_{1PR}\sqrt{10}R = 2\sqrt{10}\pi = 18.87\ m/s$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\vec{v}_{1PR} = -v_{1PR}\cos\alpha\vec{i} + v_{1PR}\sin\alpha\vec{j}$$

$$\vec{v}_{1PR} = -2\sqrt{10}\pi\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{i} + 2\sqrt{10}\pi\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{j}$$

$$\vec{v}_{1PR} = -6\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j}$$

Kod rotacije (i općenito kod krivolinijskog gibanja) ubrzanje je prikazano s tangencijalnom i normalnom komponentom. Tangencijalno ubrzanje a_{PR}^{T} leži na pravcu okomito na radijvektor položaja kao i vektor brzine v_{PR}, a komponenta normalnog ubrzanja a_{PR}^{N} usmjerena je prema središtu rotacije.

$$a_{1PR}^{T} = \varepsilon_{1PR}\sqrt{10}R = 2\sqrt{10}\pi = 19.87\ m/s^2$$

$$\vec{a}_{1PR}^{T} = -a_{1PR}^{T}\cos\alpha\vec{i} + a_{1PR}^{T}\sin\alpha\vec{j} = -2\sqrt{10}\pi\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{i} + 2\sqrt{10}\pi\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{j}$$

$$\vec{a}_{1PR}^{T} = -6\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j}$$

$$a_{1PR}^{N} = \omega_{1PR}^{2}\sqrt{10}R = 2\sqrt{10}\pi^2 = 62.42\ m/s^2$$

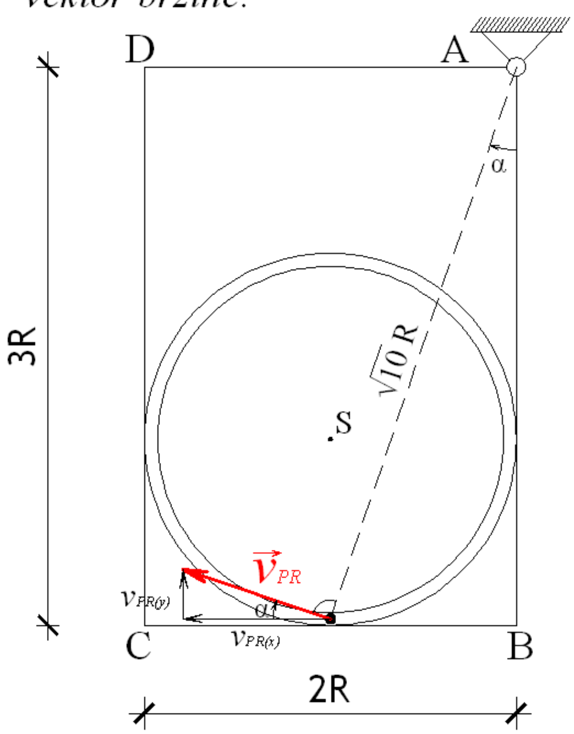
$$\vec{a}_{1PR}^{N} = a_{1PR}^{N}\sin\alpha\vec{i} + a_{1PR}^{N}\cos\alpha\vec{j} = 2\sqrt{10}\pi^2\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + 2\sqrt{10}\pi^2\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$$

$$\vec{a}_{1PR}^{N} = 2\pi^2\vec{i} + 6\pi^2\vec{j}$$

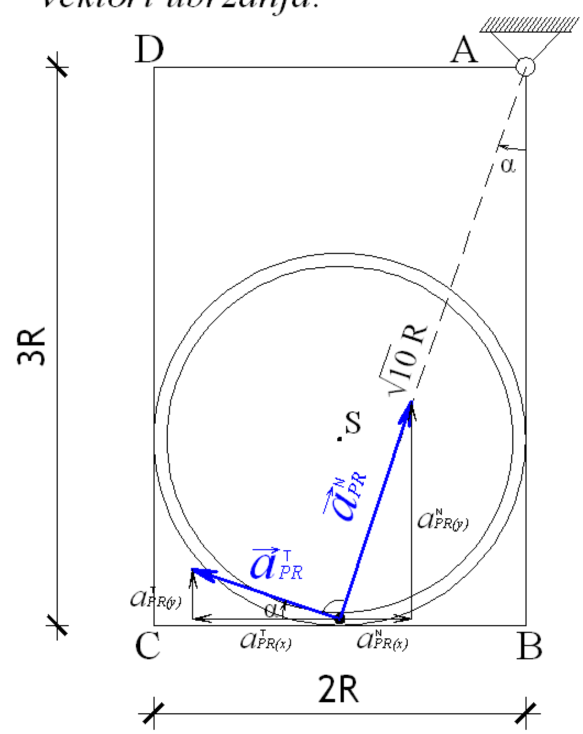
$$\vec{a}_{1PR} = \vec{a}_{1PR}^{T} + \vec{a}_{1PR}^{N} = -6\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j} + 2\pi^2\vec{i} + 6\pi^2\vec{j}$$

$$\vec{a}_{1PR} = \left(2\pi^2 - 6\pi\right)\vec{i} + \left(6\pi^2 + 2\pi\right)\vec{j}$$

vektor brzine:



vektori ubrzanja:



RELATIVNO GIBANJE

Gibanje kuglice u pomičnom koordinatnom sustavu je relativno. U ovome zadatku, gibanje pomičnog sustava je rotacija ploče ABCD, a gibanje unutar tog pomičnog sustava je rotacija kuglice po kružnici polumjera R (gibanje kuglice u žljebu) i ono predstavlja relativno gibanje kuglice.

Relativno gibanje zadano funkcijom $s(t) = \pi t^2$ – prirodni način zadavanja

Za relativno gibanje trajektorija je kružnica radijusa R (žlijeb) i za položaj u trenutku $t_1 = 1s$ vektor brzine leži na pravcu tangente na kružnicu polumjera R u promatranom položaju, a usmjeren je prema pravilu desne ruke (vektorski produkt), što je u ovom slučaju smjer negativne osi x.

$$v_{REL}(t) = \frac{ds_{REL}}{dt} = 2\pi t \xrightarrow{za\ t_1=1s} v_{1REL} = 2\pi\ m/s$$

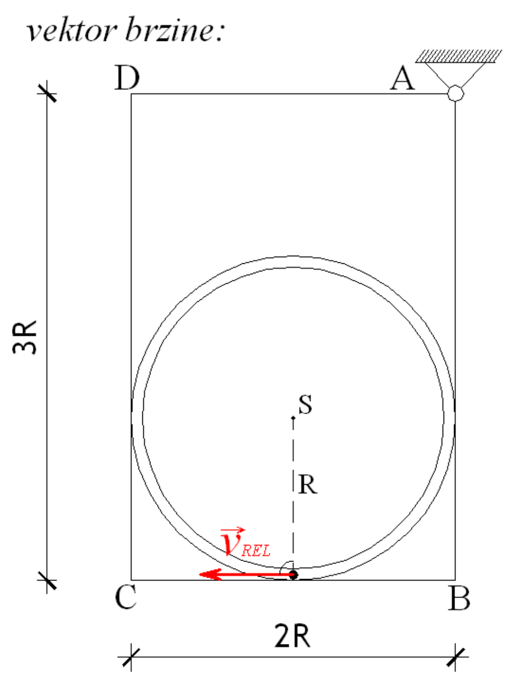
$$\vec{v}_{1REL} = -2\pi\vec{i}\ m/s$$

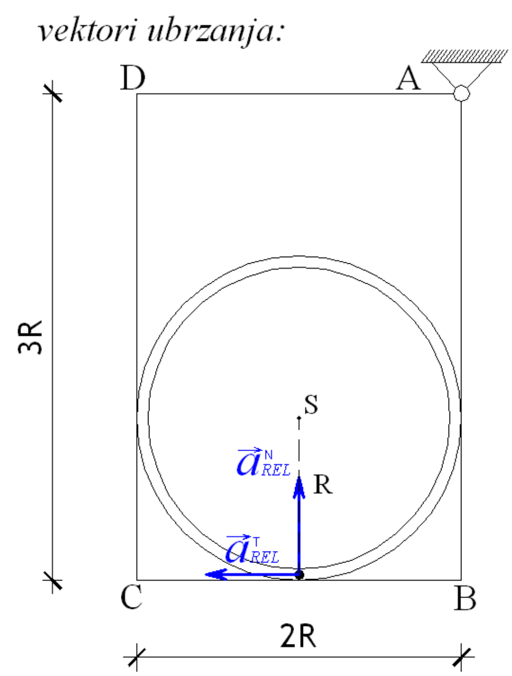
Na slici su prikazani vektori ubrzanja. Tangencijalna komponenta ubrzanja za ralativno gibanje a_{REL}^T leži na tangenti na tajektoriju (na istom pravcu kao i v_{REL}), dok je normalna komponenta a_{REL}^N usmjerena prema središtu rotacije, a to je za relativno gibanje točka *S*.

$$a_{REL}^T = \frac{dv_{REL}}{dt} = 2\pi \qquad a_{REL}^N = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

$$\vec{a}_{1REL}^T = -2\pi\vec{i} \qquad \vec{a}_{1REL}^N = 2\pi^2\vec{j}$$

$$\vec{a}_{1REL} = \vec{a}_{1REL}^T + \vec{a}_{1REL}^N = -2\pi\vec{i} + 2\pi^2\vec{j}$$





APSOLUTNO GIBANJE

Za materijalnu točku koja vrši složeno gibanje, apsolutno gibanje točke određuje se vektorskim zbrojem prijenosnog i relativnog gibanja.

Ukupna vrijednost brzine kuglice za trenutak u $t_1 = 1\ s$ jednaka je vektorskom zbroju brzina prijenosnog i relativnog gibanja:

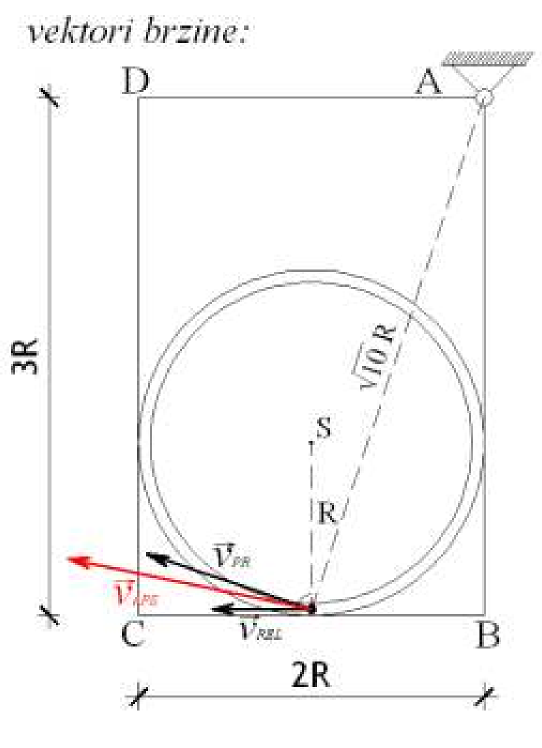
$$\vec{v}_{APS} = \vec{v}_{REL} + \vec{v}_{PR}$$
$$\vec{v}_{APS} = -2\pi\vec{i} + \left(-6\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j}\right)$$
$$\vec{v}_{APS} = -8\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j}$$
$$v_{APS} = \left|\vec{v}_{APS}\right| = \sqrt{64\pi^2 + 4\pi^2} = 2\sqrt{17}\pi = 25.9\, m/s$$

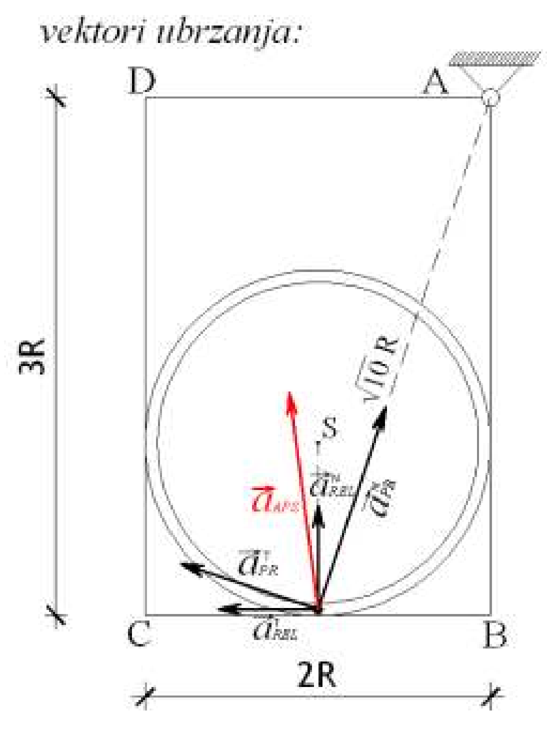
Kada je prijenosno gibanje rotacija, tada imamo i coriolisovo ubrzanje koje se određuje iz vektorskog produkta:

$$\vec{a}_{COR} = 2\vec{\omega}_{PR} \times \vec{v}_{REL} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \pi \\ -2\pi & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\pi^2\vec{j}$$

Ukupna vrijednost ubrzanja odredi se zbrajanjem vektora:

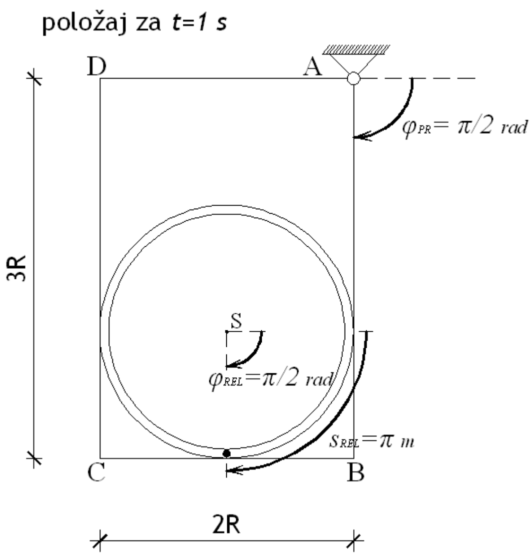
$$\vec{a}_{1APS} = \vec{a}_{1REL} + \vec{a}_{1PR} + \vec{a}_{1COR} = -2\pi\vec{i} + 2\pi^2\vec{j} + \left(2\pi^2 - 6\pi\right)\vec{i} + \left(6\pi^2 + 2\pi\right)\vec{j} - 4\pi^2\vec{j}$$
$$\vec{a}_{1APS} = \left(2\pi^2 - 8\pi\right)\vec{i} + \left(4\pi^2 + 2\pi\right)\vec{j}$$
$$\vec{a}_{1APS} = -5.39\vec{i} + 45.76\vec{j}$$
$$a_{1APS} = \left|\vec{a}_{1APS}\right| = \sqrt{(-5.39)^2 + 45.76^2} = 46.07\ m/s^2$$





PRIJELAZ S PRIRODNOG NA POLARNI NAČIN ZADAVANJA RELATIVNOG GIBANJA

Zadatak se može riješiti tako da se i relativno gibanje analizira u polarnom koordinatnom sustavu što je pogodno jer je trajektorija kružnica. Ishodište polarnog sustava za relativno gibanje postavlja se u središte kružnice S.



$$\varphi_{REL}(t)=\frac{s_{REL}(t)}{R}=\frac{\pi t^2}{2}=\frac{\pi}{2}t^2$$

$$\varphi_{REL}(t)=\frac{\pi}{2}t^2 \xrightarrow{za\ t_1=1s} \varphi_{1REL}=\frac{\pi}{2}rad$$

$$\omega_{REL}(t)=\frac{d\varphi_{REL}}{dt}=\pi t \xrightarrow{za\ t_1=1s} \omega_{1REL}=\pi\ rad/s$$

$$\varepsilon_{REL}(t)=\frac{d\omega_{REL}}{dt}=\pi \xrightarrow{za\ t_1=1s} \varepsilon_{1REL}=\pi\ rad/s^2$$

Na slici je prikazano određivanje položaja kuglice za $\varphi_{REL}=\pi/2$.

Dalje se vektori brzine i ubrzanja određuju po pravilima za polarni koordinatni sustav.

$$v_{1REL}=\omega_{1REL}R=2\pi$$
$$\vec{v}_{1REL}=-2\pi\vec{i}$$
$$a_{1REL}^T=\varepsilon_{1REL}R=2\pi$$
$$\vec{a}_{1REL}^T=-2\pi\vec{i}$$
$$a_{1REL}^N=\omega_{1REL}^2R=2\pi^2$$
$$\vec{a}_{1REL}^N=2\pi^2\vec{j}$$
$$\vec{a}_{1REL}=\vec{a}_{1REL}^T+\vec{a}_{1REL}^N=2\pi\vec{i}+2\pi^2\vec{j}$$